УДК 372.851

ПОХІДНА ТА ІНТЕГРАЛ У НЕРІВНОСТЯХ

Жук Юрій

Науковий керівник: канд. ф.-м. наук, доцент Вороний О. М.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Елементи математичного аналізу займають значне місце у шкільному курсі математики. Учні опановують математичний апарат, який може бути ефективно використаний при розв'язанні багатьох задач математики, фізики, техніки. Мова похідної та інтеграла дозволяє строго формулювати багато законів природи. У курсі математики за допомогою диференціального й інтегрального числень досліджуються властивості функцій, будуються їхні графіки, розв'язуються задачі на екстремальні значення, обчислюються площі та об'єми геометричних фігур. Іншими словами, методи математичного аналізу дозволяють розглянути низку задач, які складно розв'язати елементарними методами. До таких задач також належать задачі на доведення нерівностей. Метою статті є ознайомлення з деякими прийомами доведення нерівностей за допомогою похідної та інтеграла.

Ключові слова*: похідна, інтеграл, нерівності.*

HISTORY OF CREATION AND DEVELOPMENT OF INTEGRAL

Y. Zhuk

Scientific supervisor: O. Vorony

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

Elements of mathematical analysis occupy a significant place in the school course of mathematics. Students learn mathematical apparatus, which can be effectively used in solving many problems of mathematics, physics, engineering. The language of the derivative and the integral makes it possible to strictly formulate many laws of nature. In the course of mathematics, with the help of differential and integral calculus, the properties of functions are studied, their graphs are constructed, tasks are solved for the largest and the least value, and the area and volumes of geometric figures are calculated. In other words, the introduction of a new mathematical apparatus allows us to consider a number of problems whose solution can not be by elementary methods. However, the possibilities of methods of mathematical analysis of such tasks are not exhausted.

Many traditional elementary problems (the proof of inequalities, identities, research and solution of equations, and others) are effectively solved using the concepts of the derivative and the integral.

Keywords: derivative, integral, inequalities.

Постановка проблеми. Часто на учнівських математичних олімпіадах пропонуються задачі на доведення нерівностей, які важко розв'язуються засобами елементарної математики, і порівняно просто розв'язуються за допомогою методів математичного аналізу. Однак, шкільні підручники та навчальні посібники [1; 2; 3; 4] мало або зовсім не приділяють уваги цим питанням. Разом з тим нестандартне використання елементів математичного аналізу, яке базується на усталених поняттях і твердженнях, дозволяє глибше засвоїти ці поняття. Тут доводиться підбирати метод рішення задачі, перевіряти умови його застосовності, аналізувати отримані результати. По суті, часто проводиться невелике математичне дослідження, в процесі якого розвиваються логічне мислення, математичні здібності, підвищується математична культура.

Аналіз досліджень і публікацій. Вивчення багатьох фізичних процесів і геометричних закономірностей зводиться до розгляду рівнянь і нерівностей. Використання похідної та інтегралу при доведенні нерівностей досліджуються у працях [5; 6; 7; 8 та ін. В цих роботах ведеться мова про методи використання похідної та інтегралу при розв'язуванні рівнянь, доведенні нерівностей і тотожностей.

Мета статті. Метою статті стало визначення основних прийомів використання похідної та інтегралу при доведенні нерівностей зі змінною і числових нерівностей.

Виклад основного матеріалу дослідження

1. Застосування похідної. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$ і диференційовні в інтервалі (a,b).

а) Для доведення нерівностей $f(x) < f(x_0)$ або $f(x) > f(x_0), a \le x_0 < x \le b$, досить дослідити знак похідної $f'(x)$. Якщо $f'(x) > 0$, $x \in (a,b)$, то функція зростає в цьому інтервалі, а тому $f(x) > f(x_0), a \le x_0 < x \le b$. Якщо ж $f'(x) < 0$, $x \in (a,b)$, то $f(x) < f(x_0), a \le x_0 < x \le b$. Аналогічно доводяться не строгі нерівності.

б) Для доведення нерівності $f(x) \le g(x), x \in [a,b]$ потрібно утворити функцію $y(x) = f(x) - g(x), x \in [a,b]$, і за відомими алгоритмами знайти її найбільше значення $M = y(x_0), x_0 \in [a,b]$. Якщо $M = 0$, то $y(x) \le 0$ для всіх $x \in [a,b]$, а отже $f(x) \le g(x), x \in [a,b]$. Для доведення нерівності $f(x) \ge g(x), x \in [a,b]$ потрібно знайти найменше значення m. Якщо $m = 0$, то $f(x) \ge 0 \Leftrightarrow f(x) \ge g(x)$.

Наведемо приклади нерівностей, які доводяться за допомогою описаних прийомів.

Приклад 1. Довести нерівність $\dfrac{2\cos x}{1+\cos x} < \dfrac{\sin x}{x}$, *якщо* $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Д о в е д е н н я. Спочатку, виконуючи рівносильні перетворення, дістанемо нерівність

$$2x - tgx - \sin x < 0,\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Знайдемо похідну функції $f(x) = 2x - tgx - \sin x$ і дослідимо її:

$$f'(x) = 2 - \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \cos x\right) \le 2 - 2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x} = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\cos x}}\right)$$

Оскільки $f(x)$ неперервна на проміжку $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, а $f'(x) < 0$ для $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, то функція $f(x)$ спадає на ньому, а тому для $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ виконується нерівність

$$0 = f(0) > f(x) = 2x - tgx - \sin x,$$

яку й треба було довести.

Приклад 2. Довести нерівність $\sin^2 x \cos^6 x \le \dfrac{3^3}{4^4}$.

Д о в е д е н н я. Запишемо нерівність так:

$$\sin^2 x \cos^6 x - \frac{3^3}{4^4} \le 0.$$

Введемо функцію $y(x) = \sin^2 x \cos^6 x - \frac{3^3}{4^4}$ і знайдемо її найбільше значення на множині дійсних чисел. Оскільки функція періодична з періодом 2π і парна, то дослідження досить провести на відрізку $[0; \pi]$. На цьому відрізку функція диференційована. Її похідна

$$y'(x) = 2\sin x \cos^7 x - 6\sin^3 x \cos^5 x$$

дорівнює нулю у внутрішніх точках $x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \frac{5\pi}{6}$ відрізка, а також на його кінцях $x_0 = 0$ і $x_4 = \pi$. Обчислюючи значення функції у знайдених точках, дістанемо, що $\max\limits_{[0;\pi]} y(x) = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 0$, тобто $y(x) \le 0$ для всіх $x \in [0; \pi]$, а отже, і для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$. Нерівність доведено.

Приклад 3. Довести, що при $x > 0$ виконується нерівність $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Д о в е д е н н я . Розглянемо функцію $y(x) = e^x - 1 + x + \frac{x^2}{2}$. Знайшовши її похідні $y'(x) = e^x - 1 + x$ та $y''(x) = e^x - 1$, бачимо, що друга похідна перетворюється в 0 у точці $x = 0$ і при переході через цю точку змінює знак із «–» на «+». Це означає, що для функції $y'(x)$ точка $x = 0$ є точкою мінімуму і $y'(0) = 0$. Таким чином, $y'(x) \ge 0$ на всій числовій осі. Звідси випливає, що функція $y(x)$ монотонно зростає. Оскільки $y(0) = 0$, то при $x > 0$ маємо $y(x) > 0$. Нерівність доведено.

Приклад 4. Довести, що при $x > -1$ для всіх натуральних n виконується нерівність $(1 + x)^n \ge 1 + nx$ (нерівність Бернуллі).

Д о в е д е н н я . При $n = 1$ нерівність правильна. Нехай $n > 1$. Розглянемо функцію $f(x) = (1 + x)^n - 1 - nx$. Її похідна $f'(x) = n(1 + x)^{n-1} - n$ перетворюється в нуль у єдиній точці $x = 0$, яка є точкою мінімуму. Тому для всіх $x > -1$ виконується нерівність $f(x) \ge f(0)$, тобто $(1 + x)^n - 1 - nx \ge 0$. З одержаного співвідношення випливає нерівність

Бернуллі.

Приклад 5. Довести, що $2^n > n^2$ для всіх натуральних $n \geq 5$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо функцію $f(x) = 2^x - x^2$. Знайдемо її похідну $f'(x) = 2\ln 2 - 2x$ і утворимо рівняння $2^x \ln 2 - 2x = 0$. Не складно переконатися, що воно має два корені. Оскільки

$$f'(0) = \ln 2 > 0, \quad f'(2) = 4\ln 2 - 4 < 0, \quad f'(4) = 8(\ln 4 - 1) > 0,$$

то вони містяться в інтервалах $(0, 2)$, $(2, 4)$. Тому на проміжку $[4, +\infty)$ похідна залишається додатною, а функція зростаючою: для всіх $x > 4$ виконується нерівність $f(x) > f(4) \Leftrightarrow 2^x - x^2 > 0$. Звідси випливає нерівність $2^n > n^2$ для всіх натуральних $n > 4$.

Приклад 6. Довести, що при $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ виконується нерівність $\frac{\tan x}{\tan y} < \frac{x}{y}$.

Д о в е д е н н я. Доведемо нерівність $\frac{\tan x}{x} < \frac{\tan y}{y}$, яка на вказаному проміжку рівносильна заданій. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ в інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ та доведемо, що на ньому вона зростає. Для цього достатньо показати, що $f'(x) > 0$. Маємо

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}.$$

Оскільки знаменник похідної на вказаному проміжку додатний, то покажемо, що додатним є також чисельник, тобто виконується нерівність $x - \sin x \cos x > 0$. А це випливає з нерівності $2x > \sin 2x$ для $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ та $2x \geq \frac{\pi}{2} \geq \sin 2x$ при $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. Отже, $f'(x) > 0$ і функція $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ зростає в інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Тому $\frac{\tan x}{x} < \frac{\tan y}{y}$ для $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ або $\frac{\tan x}{\tan y} < \frac{x}{y}$.

Приклад 7. Порівняти числа $\sqrt[2012]{2012}$ та $\sqrt[2013]{2013}$.

Р о з в’я з а н н я. Порівняємо натуральні логарифми цих чисел, тобто числа $\frac{\ln 2012}{2012}$ та $\frac{\ln 2013}{2013}$, що рівносильно поставленій задачі, бо функція $\ln x$ монотонно зростає на своїй області визначення. Для цього розглянемо функцію $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, визначену в інтервалі $(0; +\infty)$. Встановимо проміжки її монотонності. Очевидно, що похідна $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ перетворюється в нуль у точці $x = e$. Для $x \in (0, e)$ похідна додатна, а для $x \in (e, +\infty)$ – від'ємна. Тому на проміжку $(e, +\infty)$ функція спадає: $f(2012) > f(2013) \Leftrightarrow \frac{\ln 2012}{2012} > \frac{\ln 2013}{2013} \Leftrightarrow \sqrt[2012]{2012} > \sqrt[2013]{2013}$.

2. Застосування інтегралу. Застосування інтеграла при доведенні нерівностей базується на геометричному змісті інтеграла, монотонності площі і його властивостях.

а) Якщо функція $y = f(x)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[a;b]$, то площа S відповідної криволінійної трапеції обчислюється за формулою $S = \int_a^b f(x)dx$ – геометричний зміст інтеграла;

б) Якщо фігура F_1 міститься в фігурі F, то її площа S_1 менша за площу S фігури F, тобто, якщо $F_1 \subset F$, то $S_1 < S$ – монотонність площі.

в) Якщо на проміжку $[a;b]$ задані дві неперервні функції $f(x)$ та $g(x)$ і в усіх точках цього проміжку виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$, то $\int_a^x f(t)dt \geq \int_a^x g(t)dt$. Аналогічне твердження стосується також випадків $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ та $f(x) < g(x)$.

Приклад 8. Довести, що $\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{3}{4}$.

Д о в е д е н н я. У прямокутній системі координат xOy побудуємо (Мал. 1) прямокутну трапецію T_1 з вершинами в точках $(1, 0), (2, 0), (2, 0{,}5), (1, 1)$ і криволінійну трапецію T_k, обмежену віссю абсцис, прямими $x = 1, x = 2$ і гіперболою $y = \frac{1}{x}$. Їхні площі $S_1 = \frac{3}{4}$, $S_k = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$. Оскільки $T_k \subset T_1$, то

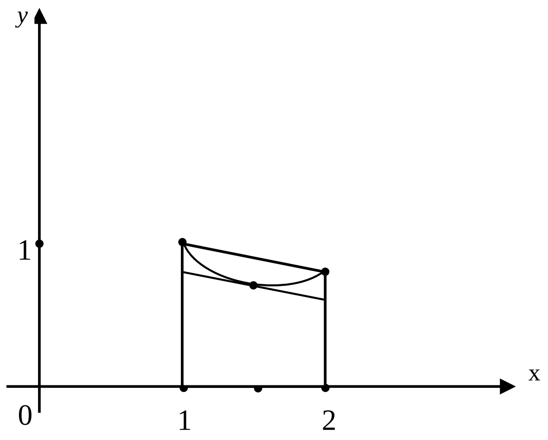
$S_k < S_1 \Rightarrow \ln 2 < \frac{3}{4}$. Для доведення лівої частини подвійної нерівності через точку $A\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$ параболи $y = \frac{1}{x}$ проведемо дотичну до параболи і розглянемо прямокутну трапецію T_2, обмежену цією дотичною, віссю абсцис і прямими $x = 1, x = 2$. Її площа $S_2 = \frac{2}{3}$ менша за площу криволінійної трапеції. Тому $\frac{2}{3} < \ln 2$. Нерівність доведено.

Приклад 9. Довести нерівність $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n} < (n+1)\sqrt{n+1}$.

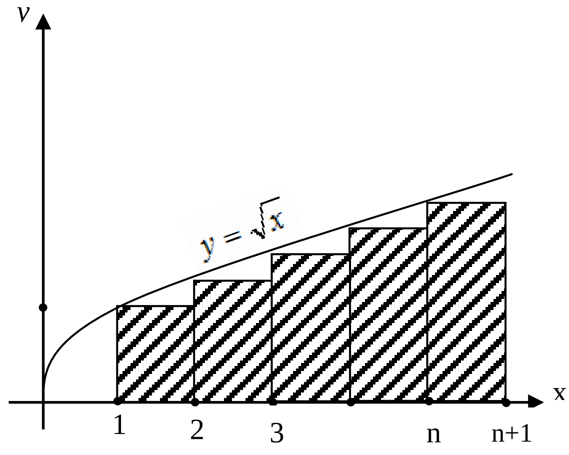
Д о в е д е н н я. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [1, n+1]$. Кожний доданок $\sqrt{k}, k = 1, 2, ..., n$, лівої частини нерівності можна трактувати як площу прямокутника з висотою $\sqrt{k}$ та основою, що є геометричним відрізком $[k, k+1]$. Ступінчата фігура Φ_1, яка складається з цих прямокутників, міститься в криволінійній трапеції Φ, яку обмежують вісь абсцис, прямі $x = 1, x = n+1$ та дуга параболи $y = \sqrt{x}$ (Мал. 2). Оскільки $S_1 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}$ – площа Φ_1, а $S = \int_1^{n+1} \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{(n+1)^3} - 1\right)$ – площа криволінійної трапеції, то $S_1 < S$. Звідси дістаємо нерівність

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n} < \frac{2}{3}\left(\sqrt{(n+1)^3} - 1\right) < \sqrt{(n+1)^3}.$$

Нерівність доведено.



Мал. 1



Мал. 2

Приклад 10. Довести, що для $x \in [1; +\infty)$ виконується нерівність

$$2013x^{2014}+1\ge 2014x^{2013}.$$

Д о в е д е н н я. Оскільки на вказаному проміжку виконується нерівність $x^{2013}\ge x^{2012}$, то для $x\ge 1$ дістаємо нерівність

$$\int_1^x x^{2013}dx\ge\int_1^x x^{2012}dx\Leftrightarrow\frac{x^{2014}-1}{2014}\ge\frac{x^{2013}-1}{2013}\Leftrightarrow 2013x^{2014}+1\ge 2014x^{2013}.$$

Насамкінець розглянемо нерівність, яку можна довести і за допомогою похідної, і використовуючи інтеграл.

Приклад 11. Довести нерівність $e^x\ge 1+\ln(x+1)$.

Д о в е д е н н я. а) Спочатку застосуємо похідну. Для цього утворимо функцію $f(x)=e^x-1-\ln(x+1)$, $x>-1$. Знайдемо її похідні: $f'(x)=e^x-\frac{1}{1+x}$, $f''(x)=e^x+\frac{1}{(1+x)^2}$.

Оскільки $f'(0)=0$, а $f''(0)>0$, то точка 0 є точкою мінімуму, а $f(0)=0$ – найменшим значенням функції. Тому для $x>-1$ виконується нерівність

$$f(x)\ge f(0)\Leftrightarrow e^x\ge 1+\ln(x+1).$$

б) Далі доведемо нерівність за допомогою інтеграла. Для цього в інтервалі $(-1,+\infty)$ розглянемо функції $f(x)=e^x$ і $g(x)=\frac{1}{1+x}$. Очевидно, що для $x\in[0,+\infty)$ виконується нерівність $e^x\ge\frac{1}{1+x}$. Тому для всіх $x\in[0,+\infty)$ дістаємо нерівність

$$\int_0^x e^x dx\ge\int_0^x\frac{dx}{1+x}\Leftrightarrow e^x-1\ge\ln(1+x).$$

Якщо $x\in(-1,0]$, то $e^x\le\frac{1}{1+x}$. Тому для всіх $x\in(-1,0]$ маємо

$$\int_x^0 e^x dx\le\int_x^0\frac{dx}{1+x}\Leftrightarrow 1-e^x\le-\ln(1+x)\Leftrightarrow e^x-1\ge\ln(1+x).$$

Співставляючи обидві здобуті нерівності, робимо висновок, що нерівність $e^x\ge 1+\ln(x+1)$ виконується для всіх $x>-1$.

Ознайомити учнів з наведеними прийомами доведення нерівностей можна на уроках, навчаючи їх застосовувати похідну та інтеграл. Для цього досить розглянути на уроках одну – дві найпростіші задачі на доведення нерівностей. Продовжити розгляд застосування похідної та інтеграла можна на засіданнях математичного гуртка або на факультативних заняттях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Литвин Н. Похідна функції. Алгебра і початки аналізу, 11 клас / Н. Литвин // Математика. – 2011. – №42. – С. 9-11.
2. Котла С. Похідна. Алгебра і початки аналізу, 11 клас / С. Котла // Математика. – 2008. – №35. – С. 15-16.
3. Мерзляк А.Г. Алгебра. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень, проф.. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011. – 431 с.: іл.
4. Бродський Я.С., Сліпенко А.К. Похідна та інтеграл в нерівностях, рівняннях, тотожностях. – К., Вища школа, 1988. – 120с.
5. Вороний О.М. Застосування похідної та інтеграла при доведенні нерівностей / О.М.Вороний // Газета для освітян «Математика», ВП Перше вересня. 1999. – №10 (22). С. 3,8.
6. Вороной А.Н. Интеграл помогает доказывать неравенства / А.Н. Вороной // Математика в школе (Москва). 2002. – №6. – С. ???
7. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики: навч.-метод. посібник / О.М. Вороний. – Харків: Видавнича група «Основа», 2008. – 225 с..
8. Дороговцев А.Я. Інтеграл та його застосування. – К.: Вища школа. 1974. - 125с.
9. Дорофєєв Г.М. Застосування похідних при вирішенні задач у шкільному курсі математики // Математика в школі. - 1980. – № 5 – С. 12-21, № 6 - С. 24-30.
10. Рижов Ю.М. Похідна та її застосування. – К. Вища школа, 1977. - 83с.
11. Ушаков Р.П., Хацет Б.І. Опуклі функції та нерівності. – К. Вища школа, 1986. – 112с.
12. Шунда Н.М., Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу: Вступ до аналізу. Диференціальне числення. Навч. посібник. – К., Вища школа, 1993 .– 375с.